FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADISTICA
*****

APLICACIONES DE LA RECTA EN LA ECONOMIA

CICLO I- 2020

1. Recta de Demanda

De manera general, al aumenta el precio de un producto en el mercado disminuye su demanda, mientras que al disminuir el precio aumenta la demanda del producto. Existe, por lo tanto, una relación inversa entre el precio del producto y la cantidad demandada, si el precio se representa por p y la cantidad demandada por q, la relación p y q se llama ecuación de la demanda y a su grafico se le denomina gráfico de demanda.

En los libros de economía se acostumbra colocar la cantidad q en el eje horizontal, sin embargo, en este texto se colocará en el eje horizontal el precio y en el eje vertical la cantidad q.

Una gráfica de demanda lineal tiene pendiente negativa es decreciente y tiene la forma de la Figura 1:

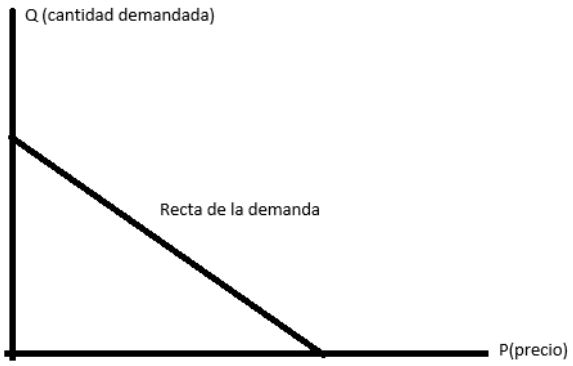


Figura 1: Recta de Demanda

La cantidad de la demanda únicamente tiene sentido para valores positivos de q (cantidad) y de p (precio)

2. Rectas de la Oferta

Generalmente, al aumentar el precio de un artículo, es mayor la cantidad de dichos artículos que los fabricantes ofrecen al mercado; mientras que, al reducir el precio, se reduce también la cantidad en oferta.

Si se denota el precio unitario por p y por q la cantidad ofrecida, entonces la ecuación que relaciona p y q se llama de oferta y su gráfica se denomina, gráfica de oferta.

Una gráfica de oferta lineal es creciente ya que posee una pendiente positiva y tiene la forma de la Figura 2:

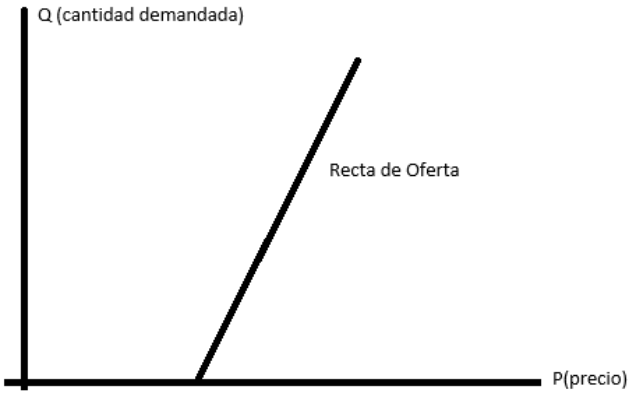


Figura 2: Recta de Oferta

Las rectas de oferta y demanda, solamente tiene sentido para valores positivos de p y q, por eso solo se gráfica en el primer cuadrante del plano cartesiano.

Ejemplo 1:

En una comunidad la demanda de leche en polvo es de 70 latas semanales, cuando el precio de cada lata es de 35 colones y es de 150 latas cuando el precio es de 25 colones. Si se da una relación lineal, encuentre la ecuación de demanda.

Solución

$$q_1 = 70 \quad \text{cuando} \quad p_1 = 35$$

$$q_2 = 150 \quad \text{cuando} \quad p_2 = 25$$

Se hace uso de la ecuación “dos puntos”

$$q - q_1 = \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1}\left(p - p_{1|}\right)$$

Sustituyendo valores

$$q - 70 = \frac{150 - 70}{25 - 35}\left(p - 35\right)$$

$$q - 70 = -\frac{80}{10}\left(p - 35\right)$$

$$q - 70 = -8p + 280$$

$$q = -8p + 280 + 70$$

$$q = -8p + 350$$

Al interpretar el gráfico se observa teóricamente que cuando el precio sea de 43.75 colones la demanda será nula y la demanda será de 350 latas de leche si se regalan, es decir el precio es cero.

Figura 3

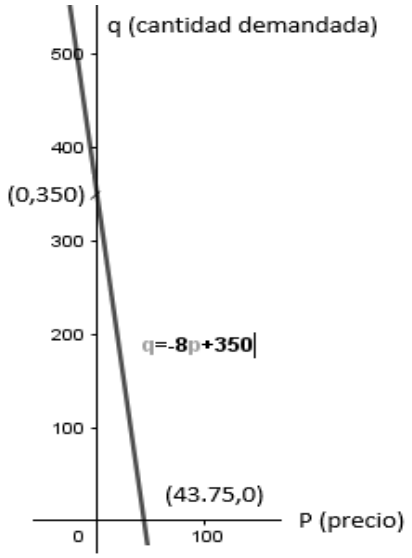


Figura 3

Ejemplo 2:

Si el precio es de 15 colones hay disponibilidad en el mercado de 50reloajes electrónicos; cuando el precio es de 25 colones hay disponibles 300. Encuentre la ecuación de la oferta, si se da una relación lineal entre el precio y la cantidad en oferta.

Solución:

$$q_1 = 50 \quad \text{cuando} \quad p_1 = 15$$

$$q_2 = 300 \quad \text{cuando} \quad p_2 = 25$$

Se hace uso de la ecuación “dos puntos”

$$q - q_1 = \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1}\left(p - p_{1|}\right)$$

Sustituyendo valores

$$q - 70 = \frac{300 - 50}{25 - 15}\left(p - 15\right)$$

$$q - 50 = \frac{250}{10}\left(p - 15\right)$$

$$q - 50 = 25p - 375$$

$$q = 25p - 325$$

Si el precio de venta fuera de 13 colones no habría quien vendiere relojes electrónicos. Figura 4.

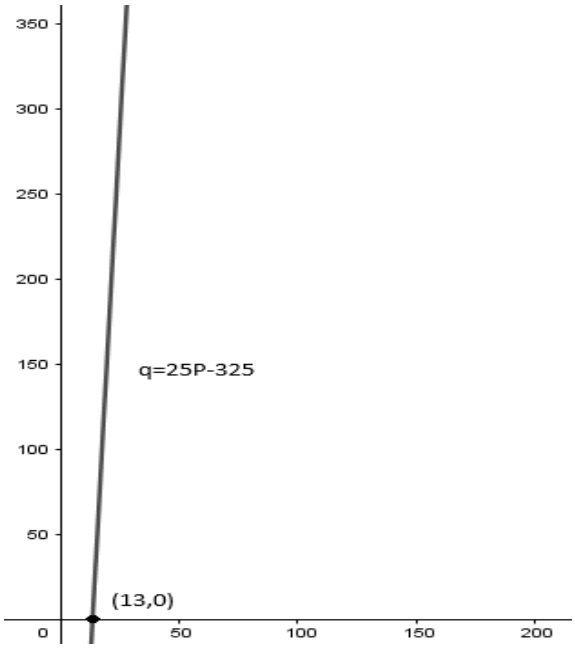


Figura 4:

3. Equilibrio de Mercado

Un equilibrio del mercado se da en el punto en que la demanda es igual a la oferta, es decir que el punto de equilibrio del mercado es aquel en el que la curva de oferta y la de demanda se intersectan, como se muestra en la Figura 5.

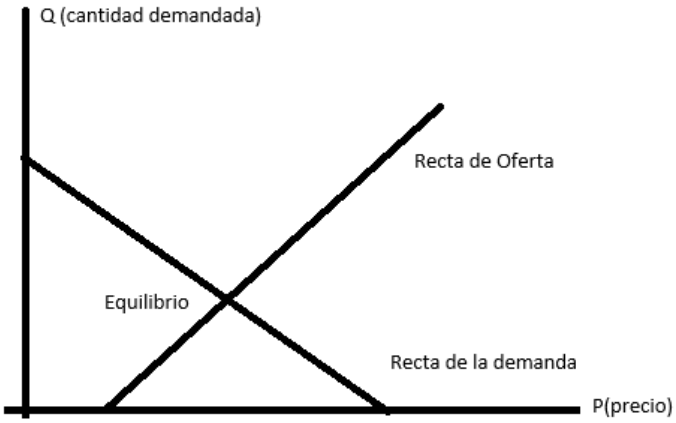


Figura 5: Equilibrio de Mercado

Se llama precio de equilibrio a aquel en que la oferta es igual a la demanda, es el precio en el cual se estabiliza la relación entre fabricantes y consumidores.

En el grafico se observa que, si un artículo es vendido a un precio mayor que el precio de equilibrio, entonces quedará en el mercado un excedente no vendido y si el artículo se vende a menor precio de equilibrio, la demanda excederá a la oferta.

Ejemplo 3:

Cuando el precio es de 15 colones hay 40 artículos disponibles en el mercado y la demanda es de 120 artículos; mientras que si el precio es de 20 colones la oferta sube a 60 y la demanda baja a 100. Encontrar el punto de equilibrio, si la ecuación de oferta y demanda son lineales

Solución:

Ecuación de Oferta:

$$q - q_1 = \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1}\left(p - p_{1|}\right)$$

Sustituyendo valores

$$q - 40 = \frac{60 - 40}{20 - 15}\left(p - 15\right)$$

$$q - 40 = \frac{20}{5}\left(p - 15\right)$$

$$q - 40 = 4p - 60$$

$$q = 4p - 20$$

Ecuación de Demanda:

$$q - q_1 = \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1}\left(p - p_{1|}\right)$$

Sustituyendo valores

$$q - 120 = \frac{100 - 120}{20 - 15}\left(p - 15\right)$$

$$q - 120 = -4\left(p - 15\right)$$

$$q-120=-4p+60$$

$$q=-4p+180$$

El punto de equilibrio es aquel donde las curvas son iguales, donde la oferta es igual a la demanda.

$$4p-20=-4p+180$$

$$8p=200$$

$$p=\frac{200}{8}=25$$

Al sustituir esta cantidad en la ecuación de oferta se tiene

$$q=4(25)+-20$$

$$q=80$$

El punto de equilibrio es $(25,80)$, cuando el precio es de 25 colones, la cantidad ofertada y demandada es igual 80, como se muestra en la Figura 6

Gráficamente

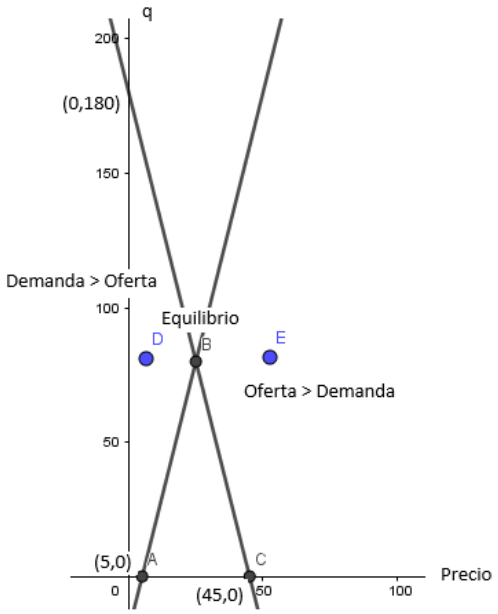


Figura 6: Punto de Equilibrio

Cuando el precio es de 5 colones nadie quiere vender y cuando el precio es de 45 colones nadie quiere comprar.

Si el precio de cierto artículo es demasiado alto, los consumidores no lo adquirirán, mientras si es demasiado bajo, los proveedores no lo venderán. En un mercado competitivo, cuando el precio por unidad depende sólo de la cantidad demandada y la oferta, siempre existen una tendencia del precio a ajustarse por sí mismo, de modo que la cantidad demandada por los consumidores iguale la cantidad que los consumidores están dispuestos a ofrecer. Se dice que el punto de equilibrio del mercado ocurre en un precio cuando la cantidad demandada es igual a la cantidad ofrecida. (Véase figura 7).

Algebraicamente, el precio de equilibrio del mercado p_0 y la cantidad de equilibrio x_0 se determina resolviendo las ecuaciones de la oferta y demanda simultáneamente para p y x. Nótese que el precio y la cantidad de equilibrio solo tienen sentido cuando no son negativas.

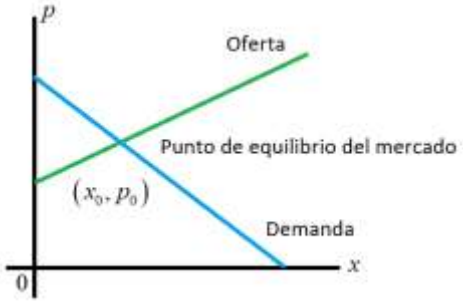


Figura 7: Punto de Equilibrio

Ejemplo 4: (Punto de Equilibrio del Mercado)

Determine el precio de equilibrio y la cantidad de equilibrio de las leyes de la oferta y de la demanda siguientes.

$$D: \quad p = 25 - 2x \qquad (2)$$
$$S: \quad p = 3x + 5 \qquad (3)$$

Solución:

Igualando los dos valores de p en las ecuaciones (2) y (3), se tiene que

$$3x + 5 = 25 - 2x$$

Fácilmente se observa que la solución es $x = 4$, sustituyendo $x = 4$ en la ecuación (2), resulta,

$$p = 25 - 8 = 17$$

En consecuencia, el precio de equilibrio es de 17 y la cantidad de equilibrio es de 4 unidades. Las gráficas de las curvas de la oferta y demanda aparecen en la Figura 8.

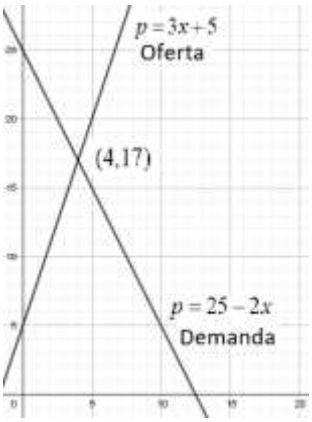


Figura 8: Punto de Equilibrio

4. Punto Muerto o Beneficio Nulo de una empresa

Los costos de producción se dividen en dos clases: costos fijos y costos variables.

1. Costos Fijos C_f : Son los que permanecen constantes en todos los niveles de producción y comúnmente incluye alquileres, depreciaciones, intereses, salarios de empleados, planta y equipo.
2. Costos variables C_v : Son los que varían con el nivel de producción incluye la mano de obra, materiales y gastos de producción variables.
3. Costos totales C_t : Es la suma de los costos fijos y los costos variables: $C_t = C_f + C_v$

Se sabe que la ganancia que se obtiene de un proceso de producción, es lo que queda después de quitar a los ingresos totales, los costos totales,

$$Ganancia = Ingreso \quad total - \quad Costo \quad total$$

Un punto muerto es aquel en que los ingresos son iguales a los costos, o sea, donde la ganancia es cero, como se muestra en la Figura 9

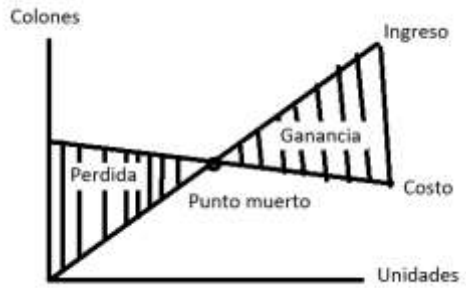


Figura 9: Punto Muerto

Al conocer la cantidad de un producto, en el punto muerto, se sabe que cualquier cantidad mayor que se venda proporcionará ganancias, puesto que el ingreso será mayor que los costos y cualquier cantidad menor, que el punto muerto, dará pérdidas.

Ejemplo 4:

Un fabricante de muebles compra 4,000 colones de madera y elabora sillas para venderlas a 205 colones cada una. Si por cada silla pagó 30 colones al carpintero y gasto 15 colones en materiales (clavos, lija, pega, etc…)

a) ¿Cuántas sillas deben vender el fabricante para llegar a un punto muerto?
b) ¿Cuántas sillas debe vender el fabricante para obtener una ganancia de 2,400 colones?

Solución

Para (a)

Sea x el número de sillas vendidas

El ingreso total $I(x) = 205$

Costo total: $\mathrm{C}(x) = 4,000 + 45x$

Ganancia: $G(x) = 205x - (4,000 + 45x)$

El punto muerto es aquel es aquel en que la ganancia es cero, por lo que se tiene:

$$205x - (4,000 + 45x) = 0$$
$$205x - 4,000 - 45x = 0$$
$$160x = 4,000$$
$$x = \frac{4,000}{160}$$
$$x = 25$$

Para recuperar costos, el fabricante deberá vender 25 sillas.

Para (b)

$$205x-\left(4,000+45x\right)=2,400$$
$$205x-4,000-45x=2,400$$
$$16x=6,400$$
$$x=\frac{6,400}{160}$$
$$x=40$$

Para obtener una ganancia de 2,400 colones el fabricante deberá vender 40 sillas.

Al graficar las ecuaciones de ingreso y costos se tiene en la Figura 10:

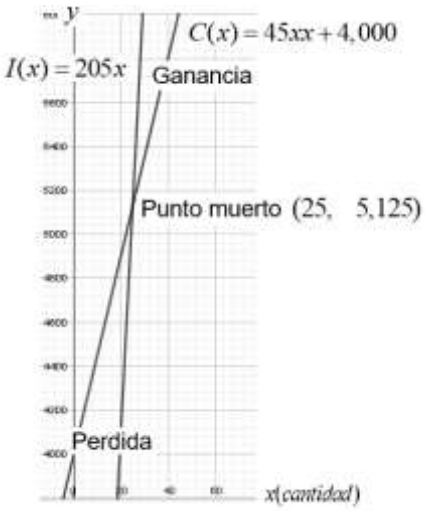


Figura 10: Punto Muerto

Ejercicios propuestos:

Represente gráficamente las soluciones de los siguientes problemas.

1. Cuando el precio de un libro de texto es de 20 colones venden 80 ejemplares; pero cuando el precio se incrementa a 90 colones, solamente se logran vender 10 ejemplares. Encuentre la ecuación lineal de la demanda. ¿Cuántos libros s venderían si el precio fuera de 40 colones?
2. Cuando la entrada cuesta 4 colones asisten 300 personas a un cine, pero cuando la entrada se incrementa a 8 únicamente asisten 40. Construya la ecuación lineal de la demanda. ¿El cine estaría vacío si el precio de la entrada fuera de?
3. Una zapatería de la calle Concepción vende mensualmente 50 pares de zapatos, elaborados por artesanos salvadoreños, cuyo precio es de 80 colones pero

solamente logran vender 4 pares de calzado de fábrica, cuyo precio es de 200 colones el par. Construya la ecuación lineal de la demanda. ¿Cuál sería la demanda si el precio del calzado fuera de 100 colones el par?

4. Cuando el precio de la botella de aceite es de 19 colones, un supermercado tiene 2 botellas en oferta, pero cuando el precio es de 23 colones el supermercado presenta 23 botellas en sus estantes. Construya la ecuación de oferta lineal. ¿Cuántas botellas pondría en los estantes el propietario si el precio fuera de 21 colones?
5. El propietario de una granja avícola dispone únicamente vender 50 pollos, cuando cada pollo se cotiza a 9 colones, pero saca al mercado 500 pollos, cuando los pollos en periodo navideño, se cotizan a 18 colones. Construya la ecuación lineal de la oferta. ¿Cuántos pollos pondrá en el mercado el productor cuando el precio de cada pollo sea de 15 colones? ¿A qué precio no habrá oferta?
6. El punto de equilibrio de un mercado para un producto ocurre cuando el precio es de 4.50 la unidad, en este caso se fabrican 13,500 unidades. El fabricante no hace oferta de unidades con precio de 1.00 y los consumidores no demandan unidades a 19.50. Obtenga la ecuación lineal de la oferta y demanda.
7. En una fábrica de camas plegables de metal se compran 10,000 colones de hierro, 2,000 colones de resortes. Si la fábrica vende cada armazón en 94 colones mientras paga 20 colones al obrero que la elabora y además gasta 9 colones en materiales (soldadura, pintura, etc…) y el equivalente a 5 colones de impuesto y transporte para cada una:
   a) Construya la ecuación de ingreso y costo
   b) Encuentre el punto muerto
   c) Si se venden solo 100 camas ¿Cuánto se pierde?
   d) Si se venden solo 210 camas ¿Cuánto se gana?
8. Un vendedor ofrece 220 pares de zapatos deportivos a 160 colones el par, pero en este caso solamente 15 personas están interesadas en dichos zapatos. Si el precio fuera de 50 colones, habría 180 personas interesadas en comprarlos. Pero en este caso el vendedor guarda sus zapatos y no está dispuesto a vender. Encuentre el punto de equilibrio. Si el precio fuera de 90 colones. ¿Qué sería mayor, la oferta o la demanda?

5. Análisis de Punto de Equilibrio

Ejemplo 5:

Para un fabricante de relojes, el costo de mano de obra y de los materiales por reloj es de $15 y los costos fijos son de $2000 al día. Si se vende cada reloj a $20, ¿Cuántos relojes deberá producir y vender cada día con objeto de garantizar que el negocio se mantenga en el punto de equilibrio?

Solución

Sea x el número de objetos producidos y vendidos cada día

El costo total de producir x relojes es

$$Ct = 15x + 2000$$

Dado que cada reloj se vende a $20, el ingreso obtenido por vender x relojes es

$$I = 20x$$

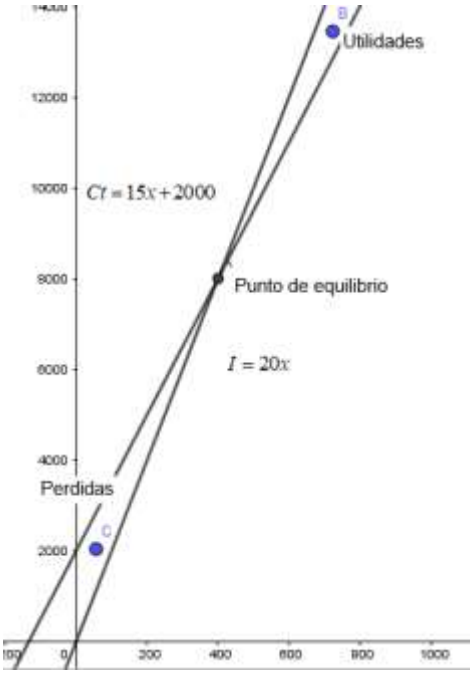
El punto de equilibrio se obtiene cuando los ingresos son iguales a los costos, es decir,

$$20x = 15x + 2000$$

Se obtiene:

$$5x = 2000$$
$$x = 400$$

De modo que se deberá producir y vender al día 400 relojes para garantizar que no hay ni utilidades ni perdidas.



Ejemplo 6:

Supóngase que el costo total diario (en dólares) de producir x sillas está dado por

$$Ct = 2.5x + 300$$

a) Si cada silla se vende a \$4 ¿Cuál es el punto de equilibrio?
b) Si el precio de venta se incrementa a \$5 por silla ¿Cuál es el nuevo punto de equilibrio?
c) Si se sabe que al menos 150 sillas deben venderse al día, ¿Qué precio deberá fijas con el objeto de garantizar que no hay perdidas?

Solución:

a) Si las sillas se venden en \$4 el ingreso obtenido es

$$I = 4x$$

En el punto de equilibrio se tiene que

$$4x = 2.5x + 300$$

Así

$$1.5x = 300$$

$$x = 200$$

El punto de equilibrio está en 200 sillas.

b) Si el precio de venta se incrementa a $5 por silla, el ingreso en este caso es de

$$I = 5x$$

El punto de equilibrio estaría dado por:

$$5x = 2.5x + 300$$

En consecuencia

$$2.5x = 300$$

$$x = 120$$

Con el nuevo precio de venta, el punto de equilibrio es de 20 sillas.

c) Sea p el precio fijado por cada silla, entonces el ingreso obtenido por la venta de 150 sillas es

$$I = 150x$$

El costo por producir 150 sillas es

$$Ct = 2.5(150) + 300$$

Con el objeto de garantizar una situación de equilibrio se tiene que

$$I = Ct$$

Es decir:

$$150p = 675$$

$$p = 4.50$$

El precio fijado a cada silla debe ser de $4.50 con el fin de garantizar que no haya ganancias ni perdidas, si al menos se venden al día 150 sillas.

6. Oferta y Demanda.

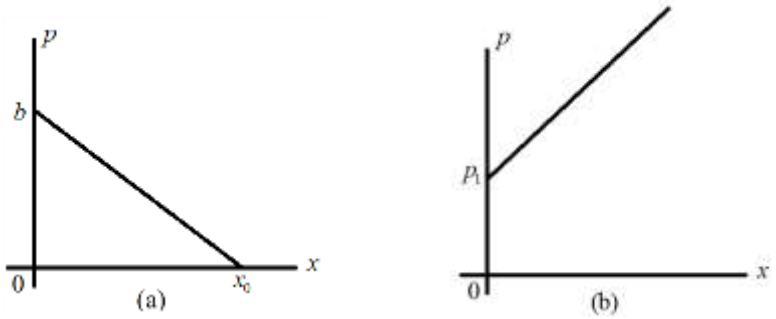


Figura 7: Oferta y Demanda

Las leyes de la oferta y demanda son dos de las relaciones fundamentales en cualquier análisis económico. La cantidad x de cualquier artículo que se adquiera por los

consumidores depende del precio en que el articulo esté disponible. Una relación que especifique la cantidad de un artículo determinando que los consumidores están dispuestos a comprar, a varios niveles de precio, se denomina Ley de la demanda. La ley más simple es una relación del tipo

$p = mx + b$ (1)

en donde p es el precio por unidad del articulo y m y b son constantes, la gráfica de una ***Ley de Demanda*** se llama la Curva de la Demanda. Obsérvese que p se ha expresado en términos de x. Esto nos permite calcular el nivel de precio en que cierta cantidad x puede venderse.

En un hecho perfectamente conocido que, si el precio por unidad de un artículo aumenta, la demanda por el articulo disminuye, porque menos consumidores podrán adquirirlo, mientras que, si el precio por unidad disminuye, es decir el artículo se abarata, la demanda se incrementará.

En otras palabras, la pendiente m de la relación de la demanda de la ecuación (1) es negativa. De modo que la gráfica de la ecuación tiene una inclinación que baja hacia la derecha, como se aprecia en la parte (a) de la **figura 7**.

Puesto que el precio p por unidad y la cantidad x demandada no son números negativos, la gráfica de la ecuación (1) solo debe dibujarse en el primer cuadrante.

La cantidad de un artículo determinado por sus proveedores están dispuestos a ofrecer depende del precio al cual puedan venderlo. Una relación que especifique la cantidad de cualquier artículo que los fabricantes (o vendedores) puedan poner en el mercado a varios precios se denomina ***Ley de la Oferta.***

La grafica de una ecuación de la oferta, se conoce como Curva de la Oferta. En general, los proveedores inundarán el mercado con una gran cantidad de artículos, si pueden ponerle un precio alto, y con una cantidad más pequeña de artículos si el precio obtenido es más bajo. En otras palabras, la oferta aumenta al subir el precio. Una curva de demanda lineal típica aparece en la parte (b) de la figura 7. el precio p_1 corresponde a un precio bajo del cual los proveedores no ofrecerán el artículo.

Ejemplo 7: (Demanda)

Un comerciante puede vender 20 rasuradoras eléctricas al día al precio de $25 cada una, pero puede vender 30 si les fija un precio de $20 a cada rasuradora eléctrica. Determine la ecuación de la demanda, suponiendo que es lineal.

Solución:

Considerando la cantidad x demandada como la abscisa o coordenada x y el precio p por unidad como la ordenada o coordenada y, los puntos sobre la curva de demanda tienen coordenadas:

$$x = 20, \qquad p = 25 \quad \text{y} \quad x = 30, \qquad p = 20$$

De modo que los puntos son $(20, 25)$ y $(30, 20)$. Dada que la ecuación de la demanda es lineal, está dada por la ecuación de un alinea recta que pasa por los puntos $(20, 25)$ y $(30, 20)$, la pendiente de la línea que une estos puntos es:

$$m = \frac{20-25}{30-20} = -\frac{5}{10} = -0.5$$

Para la formula punto pendiente, la ecuación de la línea que pasa por $(20, 25)$ con pendiente $m = -0.5$ es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Dado que $y = p$, se tiene que:

$$p - 25 = -0.5(x - 25)$$
$$p = -0.5x + 35$$

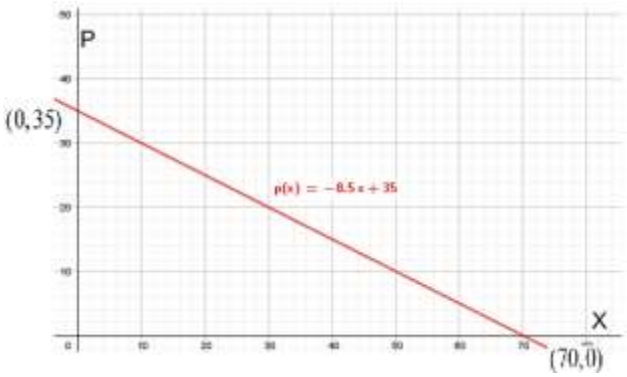


Figura 8. Grafica de $p = -0.5x + 35$

Ejemplo 8:

Determine el precio de equilibrio y la cantidad de equilibrio de las leyes de la oferta y de la demanda siguientes.

$$D: \quad p = 25 - 2x \quad (2)$$
$$S: \quad p = 3x + 5 \quad (3)$$

Solución:

Igualando los dos valores de p en las ecuaciones (2) y (3), se tiene que

$$3x + 5 = 25 - 2x$$

Fácilmente se observa que la solución es $x = 4$, sustituyendo $x = 4$ en la ecuación (2), resulta,

$$p = 25 - 8 = 17$$

En consecuencia, el precio de equilibrio es de 17 y la cantidad de equilibrio es de 4 unidades. Las gráficas de las curvas de la oferta y demanda aparecen en la figura 7.

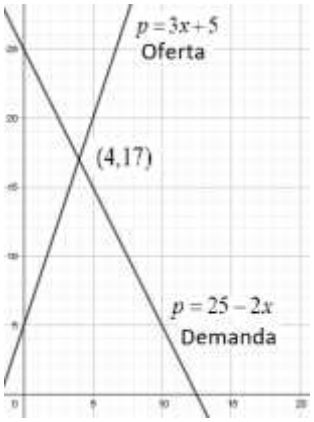


Figura 7

Ejemplo 9:

Si la ecuación de la demanda y la oferta, respectivamente

$$D: \quad 3p + 5x = 22 \quad (4)$$
$$S: \quad 2p - 3x = 2 \quad (5)$$

Determine los valores de x y p en el punto de equilibrio del mercado.

Las ecuaciones (4) y (5) forma un sistema de ecuaciones lineales, resolviendo se logra que el punto de equilibrio en el mercado es cuando $p = 4$ y $x = 2$

Ejemplo: (Punto de equilibrio no lineal)

La demanda para los bienes producidos por una industria está dada por la ecuación

$$p^2 + x^2 = 169 \quad (6)$$
$$p = x + 7 \qquad (7)$$

Sustituyendo la ecuación (7) en la ecuación (6) y simplificando, resulta

$$(x+7) + x^2 = 169$$

$$2x^2 + 14x + 49 = 169$$

$$x^2 + 7x - 60 = 0$$

Factorando se encuentra

$(x+12)(x-5) = 0$

De lo cual cuando $x = -12$ y $x = 5$, El valor negativo de $x = -12$ es inadmisible, de modo que $x = 5$. En consecuencia el precio de equilibrio es 12 y la cantidad de equilibrio es 5.